学校编号:10384　　分类号:_____　密级:_____
学号:B200423005　　UDC: ________________________

博 士 学 位 论 文

曲线、曲面造型中关于逼近和收敛性问题的研究

Research on Approximation and Convergence Problems in Curves and Surfaces Modeling

陈 雪 娟

指导教师姓名:　曾晓明　教授
申请学位级别:　博 士 学 位
专 业 名 称:　基 础 数 学
论文提交日期:　2007 年 4月
论文答辩日期:　2007 年 6月
学位授予单位:　厦 门 大 学
学位授予日期:　2007 年　月
答辩委员会主席: ______________________________
评阅人: ____

2007 年 4 月

厦门大学学位论文原创性声明

兹呈交的学位论文，是本人在导师指导下独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考的其它个人或集体的研究成果，均在文中以明确方式标明。本人依法享有和承担由此论文而产生的权利和责任。

责任人（签名）：

年　月　日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人完全了解厦门大学有关保留、使用学位论文的规定。厦门大学有权保留并向国家主管部门或其指定机构送交论文的纸质版和电子版，有权将学位论文用于非赢利目的的少量复制并允许论文进入学校图书馆被查阅，有权将学位论文的内容编入有关数据库进行检索，有权将学位论文的标题和摘要汇编出版。保密的学位论文在解密后适用本规定。

本学位论文属于

1. 保密（），在年解密后适用本授权书。

2. 不保密（）

（请在以上相应括号内打"√"）

作者签名：　　　　日期：　　年　　月　　日

导师签名：　　　　日期：　　年　　月　　日

摘　要

计算机辅助几何设计 (Computer Aided Geometric Design, 简称 CAGD) 是随着航空、汽车等现代工业发展与计算机的出现而产生与发展起来的一门学科。而自由曲线、曲面造型是 CAGD 的重要内容。本篇论文主要研究曲线、曲面造型中的几何逼近和收敛性问题，在如下几个方面取得一些进展。

1. 曲线曲面的等距计算在几何造型、NC(Numerical Control) 加工和机构运动学等领域具有广泛应用。一般来说，由于单位法向量的表达式中含有根号，所以等距曲线、曲面的函数表达式比原曲线、曲面的表达式更加复杂。因此常用低次有理参数曲线、曲面来逼近等距曲线、曲面。本文提出两种新的等距曲线的逼近方法：(1) 等距曲线的 Bézier 逼近算法。此算法先将任意形式的参数曲线转化成分段三次 Bézier 曲线，利用 Bézier 曲线的性质容易得到逼近曲线的切向量和法向量，从而计算出其等距逼近曲线。(2) 利用样条曲线插值的等距曲线逼近方法。利用样条曲线和原曲线加权组合构造一条新的有理曲线，该曲线通过插值原曲线的等距曲线上的采样点，从而逼近等距曲线。文中分析和比较了这两种算法的优缺点，并将第二种方法推广应用于求张量积等距曲面的逼近。

2. 在工程应用中，由于实际问题的需要，我们必须拓广古典意义下的等距曲线、曲面的定义，即改变古典等距定义中的等距方向和等距距离，我们称之为广义等距曲线、曲面。本文利用曲线上各点的切向量和法向量所形成的局部坐标系来确定等距方向，从而给出一种广义偏距曲线的新定义。并在此基础上做相应的讨论，研究其正则性、曲率和积分性质，推广了 J.steiner 关于卵形线的外等距线所围面积的一个著名定理。

3. Bézier 曲线、曲面的升阶和子划分算法在几何造型中是很重要的方法。将升阶和子划分算法分别应用于 Bézier 张量积曲面，会产生一系列的控制网格，得到原曲面的分片双线性逼近。本文将曲面的控制网格进行分片均匀参数化，给出了它们的任意阶离散偏导数的定义，证明这两种算法的光滑收敛性，即控制网格的离散偏导数都收敛于原 Bézier 曲面的相应的连续偏导数。Ron Goldman 利用负二项分布作为基函数，定义了一种新的有理 Bézier 曲线。本文也证明了这类有理 Bézier 曲线的光滑升阶收敛性。这对于研究逼近曲线曲面的光滑性是很有意义的。

4. 细分曲面是自由曲面造型的强有力的工具。Catmull-Clark 细分曲面将双三次 B 样条曲面推广到任意拓扑网格上。我们通过介绍相邻顶点的概念，利用控制点的一阶差分，得到 Catmull-Clark 曲面的控制网格的收敛率。而且，推导出一个计算细分后控制网格到 Catmull-Clark 曲面的距离公式。

关键词：曲线和曲面；逼近；收敛；细分

Abstract

Computer Aided Geometric Design (CAGD) is a subject which emerged with the development of modern industry and computer science. Free-form curves and surfaces modeling is one of the most important tasks in CAGD. This dissertation focuses on solving geometric approximation and convergence problems in curves and surfaces modeling. The major contributions of this dissertation are summarized as follows.

1. Constant radius offsetting for curves and surfaces is one of the most important geometric operations in CAD/CAM due to its immediate application to NC machining. Due to the square root function in the denominator of unit normal vectors generally, the exact offset curves and surfaces are not rational. Therefore approximations are needed, often by using rational parameter curves and surfaces with low degree. This dissertation presents two new methods of offset approximation: (1) Bézier Approximation algorithm of offset curves. This algorithm firstly translates arbitrary parameter curves into the piecewise cubic-degree Bézier curves, then using the properties of Bézier curve we can get the tangent vector and the normal vector of every point on the approximation curve, and calculate the approximating offset curve. (2) The approximating offset curve by interpolatory using spline curve. Spline curve and base curve are combined to generate a new rational curve by adding the weight. This curve approximates offset curve by interpolating some sample nodes on the offset curve. We analyze and compare the advantage and the weakness of these two algorithms, and apply the second method to the approximation of tensor product offset surface.

2. In order to solve practical problems in real engineering applications, the classic definition of offset curve should be extended, which means the fixed distance and direction in the classic definition will not be a necessary request. This dissertation presents a definition of general offset curve, which has fixed offset distance, but variable offset direction. The offset direction is defined by the local coordinate system, which is formed of the tangent vector and the normal vector of every point on the curve. Based on this definition, the curvature、regular and integral properties of the general offset curve are

discussed. As a result, J.steiner's celebrated theorem of the oval is developed.

3. The algorithms of degree elevation and subdivision for Bézier curves、surfaces play an important role in geometric modeling. For the Bézier tensor product surface, recursive degree elevation and subdivision both generate a sequence of control meshes that converge to the underlying Bézier surface, and get the piecewise bilinear approximation of the original surface. This dissertation uniformly parameterizes the control nets, provides the definition of its discrete partial derivatives for arbitrary order and proves the smooth convergence property of these two algorithms. That is, the discrete partial derivatives of control nets convergent to its corresponding continuous partial derivatives. Ron Goldman introduced an alternative notion of rational Bézier curves defined in terms of the negative degree Bernstein blending functions. This dissertation proves the smooth convergence property of degree elevation for this kind of rational Bézier curve as well. It is significative for the smooth property of approximating curves and surfaces.

4. Subdivision surfaces are powerful and useful technique in modeling free-form surfaces. The Catmull-Clark subdivision surface was designed to generalize the bi-cubic B-spline surface to the meshes of arbitrary topology. By introducing the concept of neighbor points and using the first-order difference of control points of Catmull-Clark surfaces, we obtain the rate of convergence of control meshes of Catmull-Clark surface. With the result of convergence we derive a computational formula of subdivision depth for Catmull-Clark surface.

Key Words curves and surfaces; approximation; convergence; subdivision

目　录

Contents

第一章　绪　　论

§1.1　背景介绍

计算机辅助几何设计（Computer Aided Geometric Design，简称 CAGD）是随着航空、汽车等现代工业发展与计算机的出现而产生与发展起来的一门学科。主要研究在计算机图象系统的环境下对曲线和曲面信息的表示、逼近、分析和综合。它源于飞机、船舶的外形放样工艺，由 Coons(1912-1979)、Bézier（1910-1999）等大师于 20 世纪 60 年代奠定理论基础。随着计算机高速的计算能力和强大的图形功能的发展，CAGD 的理论和应用也不断地发展，并且广泛地应用于飞机、船舶、汽车设计和工程器件、模具设计、生物设计、医学诊断、动画制作以及多媒体技术等领域。自由曲线、曲面造型是 CAGD 的重要内容。在产品初始设计阶段，描述其外形的曲线或曲面常常只有大致形状或只知道它通过一些空间点列（称为型值点），这类没有数学表达式的曲线或曲面称为自由曲线或自由曲面。CAGD 的首要任务就是建立它们的数学模型，使其既适合计算机处理，且有效地满足形状表示与几何设计的要求，又便于形状信息传递和产品数据交换。本篇论文主要研究曲线、曲面造型中的三个问题：(1) 等距曲线、曲面的逼近及其推广；(2) 升阶和子划分算法的光滑收敛性；(3) 细分曲面。

§1.2　等距曲线和曲面

一. 等距曲线、曲面的定义

等距（也称为 offset）曲线、曲面，是由已知曲线或曲面上的点沿其法线方向移动固定距离后所形成的曲线或曲面。等距曲线与曲面的操作是几何造型中的基本功能之一，由于等距曲线与曲面具有丰富的几何结构，在数控机床运动轨迹计算，公路铁路设计，艺术花纹设计，实体造型，基于公差带分析的误差理论研究，以及带厚度薄片的实体（如汽车车身，箱包等）设计等方面均有广泛的应用，因而受到人们的重视。

等距曲线、曲面的表示形式较为简单，具体如下:

设 $r(t), t \in [0,1]$ 是一条正则的平面曲线，则其等距曲线可表示为

$$r_o(t) = r(t) + dN(t), \quad t \in [0,1]. \tag{1}$$

式中 d 是一个常数，刻画了等距的距离；$N(t)$ 是原曲线 $r(t)$ 上 t 点处的单位法向量，表示等距的方向。根据 $d > 0$ 或 $d < 0$，我们分别得到外部的或内部的等距曲线。

设 $r(u,v), u,v \in [0,1]$ 是一张正则曲面，它的等距曲面可表为如下形式:

$$r_o(u,v) = r(u,v) + dN(u,v), \quad u,v \in [0,1]. \tag{2}$$

式中 d 是一个常数，表示等距的距离；$N(u,v)$ 是原曲面 $r(u,v)$ 上 (u,v) 点处的单位法向量，表示等距的方向。同样，根据 $d > 0$ 或 $d < 0$ 我们可得外部的或内部的等距曲面。

二. 等距曲线、曲面的逼近

曲线曲面的等距计算在几何造型、NC(Numerical Control) 加工和机构运动学等领域具有广泛应用，其中平面曲线的等距计算是最基本的问题 [1,2]。一般来说，由于单位法向量的表达式中含有根号，所以等距曲线的函数表达式比原曲线的表达式更加复杂。除了直线、圆弧、速端曲线等几种特殊曲线外，有理曲线的等距曲线不再是有理的。因此，在许多商品化软件中，如几何造型系统和 NC 加工的走刀路径计算等，为了方便系统中数据结构和几何算法的统一表示，常用低次有理参数曲线来逼近等距曲线。对于等距曲线逼近问题的研究，已经有了许多结果。

等距曲线、曲面的逼近算法主要有：(1) 由等距移动 (offsetting) 控制网格（顶点）来得到等距逼近曲线的控制网格（顶点）的方法。如 Cobb[3] 把 B 样条曲线的控制顶点沿曲线上与之距离最近点（称为结点）处的曲线法矢方向平移等距离 d；Coquillart[4] 把上述方法中的 d 根据结点曲率以及结点与原控制顶点的距离作了修正。这一方法简单直观，而且可以精确表示直线或圆弧。但在曲线曲率较大处会产生较大的误差，通常需要用邻近处的曲率值加以修正，并且控制结点需通过牛顿迭代法进行求解，对算法效率有影响。(2) 基圆包络逼近法。如 Lee 等 [5] 先用二次 Bézier 样条曲线逼近基圆，再把此逼近曲线沿基曲线扫掠所得的包络线作为等距逼近。(3) 基于插值或拟合的方法。如 Klass[6] 和 Pham[7] 分别用三次 Hermite 曲线和有限个采样点的三次 B 样条插值曲线逼近等距线；Hoschek 和 Wissel 用多段低次保端点高阶连续的样条曲线作非线性最优

化的等距逼近。(4) 不产生自交的逼近法。如 Chiang 等 [8] 把基曲线上的点与二维网格点相对应，用图象处理的方法求等距线逼近；Kimmel[9] 在具有精度所需分辨率的矩形网格上进行小波计算，最终通过对应网格点值的等高线来生成等距曲线逼近。另外，文献 [10] 引入直线圆弧逼近法，文献 [11] 则采用双圆弧逼近法，等等。

本文提出两种新的等距曲线的逼近方法：(1) 等距曲线的 Bézier 逼近算法。此算法先将任意形式的参数曲线转化成分段三次 Bézier 曲线，利用 Bézier 曲线的性质容易得到逼近曲线的切向量和法向量 [12]，从而计算出其等距逼近曲线。(2) 利用样条曲线插值的等距曲线逼近方法。利用样条曲线和原曲线加权组合构造一条新的有理曲线 [13]，该曲线通过插值原曲线的等距曲线上的采样点，从而逼近等距曲线。文中分析了这两种算法的优缺点，并对它们进行了比较。并将第二种方法推广应用于求张量积等距曲面的逼近。

三. 等距曲线的推广和应用

在工程应用中，由于实际问题的需要，我们必须拓广古典意义下的等距曲线、曲面的定义，即改变古典等距定义中的等距方向和等距距离，我们称之为广义等距曲线、曲面。广义等距曲线、曲面的概念最早由 Brechner[14] 提出；Pottmann[15] 对它作了进一步的推广，并应用于自由曲面三轴铣削的无碰撞研究 [16]。文 [17,18] 针对 NC 加工中非球头刀具（圆柱形段刀）的铣削加工，提出了一类变等距曲面形式；文 [19] 则针对曲面间的拼接操作，提出一种变等距曲线。

本文利用曲线上各点的切向量和法向量所形成的局部坐标系来确定 offset 方向，从而给出一种广义偏距曲线的新定义。并在此基础上做相应的讨论，研究其正则性、曲率和整体性质，推广了 J.steiner 关于卵形线的外等距线所围面积的一个著名定理。

§1.3 升阶和子划分算法的光滑收敛性

Bézier 曲线的升阶和子划分算法在几何造型中是很重要的方法。曲线不断递归采用升阶和子划分算法，能产生一系列的控制多边形，其收敛于原曲线，得到原曲线的分段线性逼近。本篇论文研究曲线曲面升阶和子划分的光滑收敛性，即采用升阶和子划分后产生的控制多边形（网格）会收敛于原曲线（曲面），而且控制多边形（网格）的离散

导数会收敛于原曲线（曲面）的相应的连续导数。这对于研究逼近曲线曲面的光滑性是很有意义的。

我们将升阶和子划分算法应用于 Bézier 张量积曲面，都能产生一系列的控制网格，得到原曲面的分片双线性逼近。我们将控制网格进行分片均匀参数化，给出了它们的任意阶离散偏导数的定义。最后，证明这两种算法的光滑收敛性，即控制网格的离散偏导数都收敛于原 Bézier 曲面的相应的连续偏导数。

Ron Goldman 利用负二项分布作为基函数 [20]，定义了一种新的有理 Bézier 曲线。他将 Bernstein 基函数的正次幂推广到负次幂，并介绍负次的 Bernstein 基函数的一些基本性质和恒等式。这种有理 Bézier 曲线对于曲线、曲面造型是很有价值的，Thomas Hermann[21] 证明了这类有理 Bézier 曲线升阶后的控制多边形会收敛于原 Bézier 曲线。我们将研究这类有理 Bézier 曲线的光滑升阶收敛性。即，不但升阶后的控制多边形逼近原 Bézier 曲线，而且控制多边形的任意阶离散导数会逼近原曲线相应的任意阶连续导数。我们给出有理 Bézier 曲线的升阶算法。然后，将控制多边形进行均匀参数化，并且利用均差来定义分段线性函数的离散导数。最后，推出离散导数和升阶的变换公式，证明了有理 Bézier 曲线的光滑升阶收敛性。

§1.4 Catmull-Clark 细分曲面

描述自由曲线曲面的大多数方法是采用多项式或分段多项式。然而，用多项式来描述曲线曲面，特别是对拓扑结构复杂的曲面造型以及一些对变形和光滑拼接要求较高的设计方面显得力不从心。20 世纪 70 年代末期，E.Catmull、J.Clark、D.Doo 和 M.Sabin 等提出了细分曲面的概念。细分曲面方法使得自由曲面的离散造型变的容易进行，大大增强了计算机在自由曲面造型方面应用的潜力。

在将近三十多年的发展中，细分曲面方法的理论研究日益加强，人们不断提出各种新的细分规则并进行实用有效的算法研究，如 Catmull-Clark 细分曲面、Doo-Sabin 细分曲面和 Loop 细分曲面等。与传统的连续造型方法相比，细分曲面在保真性、实时性、交互性等方面的能力都大大的提高，使之成为自由曲面造型的强有力的工具。而且与 B 样条方法和目前图形工业界的工业标准 - 非均匀有理 B- 样条 (NURBS) 方法相比最突

出的优点是可以定义在任意的拓扑网格上，产生任意拓扑类型的光滑曲面，而 B 样条方法和 NURBS 方法只能将控制网格定义在矩形的拓扑网格上，这在实际应用中有较多的局限性。

Catmull-Clark 细分曲面将双三次 B 样条曲面推广到任意拓扑网格上。每次细分是按 Catmull-Clark 细分规则进行，使原来的控制网格产生一组新的控制点，由这些控制点构成新的控制网格，并按此规则不断细分得到控制网格的极限曲面就是 Catmull-Clark 曲面 [22]。那么，在细分过程中，控制网格与极限曲面的近似程度如何？如何估计控制网格的收敛率？需要进行多少次细分步骤才能达到一定精度的误差要求呢？本篇论文第五章就是主要回答这些问题。

第二章　等距曲线、曲面的逼近

§2.1　等距曲线的 Bézier 逼近

等距曲线、曲面在几何造型、NC(Numerical Control) 加工和机构运动学等领域具有广泛应用，其中平面等距曲线是最基本的问题。而对于逼近平面等距曲线的研究，已经有了许多结果。本文给出一种平面等距曲线的 Bézier 逼近算法。这种逼近算法较为直观简单，易于实现，且在许多方面都具有较好的性质。根据此算法，首先可以将任意形式的参数曲线转化成分段三次 Bézier 曲线，利用 Bézier 曲线的性质容易得到逼近曲线的切向量和法向量，而且向量仅与控制点有关，从而可以计算其等距曲线。

一. 曲线的分割

由平面等距曲线的定义可知，欲求某条平面曲线的 offset 曲线，必须先求得原曲线上的法向量。而对于任意形式的参数曲线，要求得曲线上的法向量并不都是一件容易的事。所以，我们可以先对曲线进行分割，然后将其转化成分段三次 Bézier 曲线。Bézier 曲线的切向量和法向量容易求得，而且形式也比较简单。分割点的选取要保证在每段曲线上曲率变化小且保持单调性，可以根据曲线上曲率的变化来进行分割。由于曲率计算的复杂性，我们利用曲线上切向量的改变来确定分割点。

设参数曲线为 $r(t)$，取参数步长为 ε_1，利用差分求导公式有

$$r^{'}(t) \approx \frac{r(t+\varepsilon_1)-r(t)}{\varepsilon_1}$$

另取参数步长为 Δt，判断曲线上所取的前后两点 $r(t)$、$r(t+\Delta t)$ 处切向量转角 α 的余弦值 $\cos\alpha$，

$$\cos\alpha = \frac{r^{'}(t+\Delta t)\cdot r^{'}(t)}{|r^{'}(t+\Delta t)|\cdot|r^{'}(t)|}$$

取公差 ε_2，如果 $\cos\alpha < \varepsilon_2$，即转角 $\alpha(0<\alpha<\frac{\pi}{2})$ 大于某个值时，记下点 $r(t+\Delta t)$ 作为一个分割点。同时要保证距离 $|r(t+\Delta t)-r(t)|$ 为较小的值。以此类推，可以确定曲线上所有的分割点。参数步长 Δt 的值取得比较小，可以保证曲线上曲率变化大的地方都被单独分割出来。

二. 控制顶点的确定

分割点将参数曲线分为几段，特别是在曲率变化比较大的地方会进行细分。为了用三次 Bézier 曲线逼近每段曲线，我们需要分别确定每段曲线的四个控制顶点。如图 1 所示：

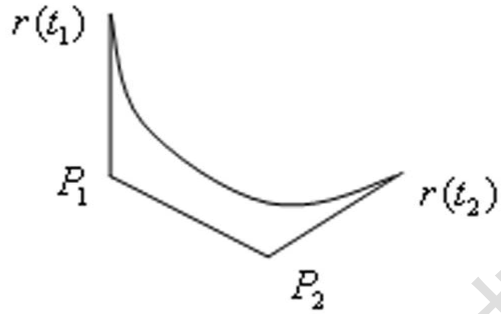

图 1 曲线段的四个控制顶点的确定

设某段曲线的两个端点为 $r(t_1)$、$r(t_2)$，这样只要再确定两个控制点 P_1、P_2 即可。规定沿曲线逆时针方向为曲线上各点处切向量的正方向，我们在曲线上点 $r(t_1)$ 处的正切方向上取点 P_1，在点 $r(t_2)$ 的反切方向上取到点 P_2，并且使得

$$|r(t_1) - P_1| = |r(t_2) - P_2| = \frac{1}{3}|r(t_2) - r(t_1)|.$$

令 $g = \frac{1}{3}|r(t_2) - r(t_1)|$，则 P_1、P_2 具体的计算公式如下：

$$P_1 = r(t_1) + \frac{r'(t_1)}{|r'(t_1)|} \cdot g, \qquad P_2 = r(t_2) - \frac{r'(t_2)}{|r'(t_2)|} \cdot g. \tag{3}$$

根据三次 Bézier 曲线公式

$$F(t) = \sum_{i=0}^{3} B_i^3(t) b_i,$$

其中 $B_i^3(t)(i = 0, 1, 2, 3)$ 是三次伯恩斯坦多项式，$b_i(i = 0, 1, 2, 3)$ 是四个控制顶点。以 $r(t_1)$、P_1、P_2、$r(t_2)$ 作为四个控制顶点，这样就可以得到原参数曲线的三次 Bézier 曲线逼近，这种分割取点法使得逼近曲线具有良好的几何连续性，达到 G^1 连续。